На правах рукописи

Нагребецкая Юлия Вацлавовна

РАЗРЕШИМОСТЬ ТЕОРИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА МАТРИЧНЫХ АЛГЕБР И ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург, 2000

Работа выполнена на кафедре алгебры и дискретной математики Уральского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Ю.М. Важенин

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор А.Г. Пинус

кандидат физико-математических наук, доцент С.С. Коробков

Ведущая организация: Тюменский государственный университет

Защита диссертации состоится 20 июня 2000 года в "14" часов на заседании диссертационного совета Д 002.07.03 в Институте математики УрО РАН по адресу:
620219, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и механики УрО РАН.

Автореферат разослан 19 мая 2000 года.

Ученый секретарь диссертационного совета кандидат физ.-мат. наук, доцент В.В. Кабанов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В центре внимания современной теоретико-модельной алгебры находятся вопросы разрешимости теорий первого порядка классов алгебраических систем. Их общая постановка восходит к А. Тьюрингу, Э. Посту, А. Черчу, А.А. Маркову. Решающий вклад в развитие соответствующего направления внесен А.И. Мальцевым, А. Тарским и Ю.Л. Ершовым.

Огромная роль матричных групп и колец, которую они играют в алгебре, обуславливает важность их исследования в рамках теории моделей. Начало изучению элементарных свойств классических линейных групп было положено А.И. Мальцевым. В [17] им доказана взаимная формульность произвольного поля F нулевой характеристики в полной линейной группе $GL(n, F)$ и в специальной линейной группе $SL(m, F)$ для любых $n \geq 2$, $m \geq 3$. Это означает одновременную разрешимость или неразрешимость элементарных теорий $\mathcal{E}GL(n, F)$, $\mathcal{E}SL(m, F)$ и $\mathcal{E}F$. Определяющей для дальнейших исследований разрешимости теорий матричных групп и колец явилась работа [16], в которой исследовано соответствие между ассоциативным кольцом R с единицей и группой $UT(n, R)$ всех унитреугольных матриц порядка n над R. А именно, показана определимость кольца R в группе $\overline{UT}(3, R) \rightleftharpoons \langle UT(3, R); \cdot, ^{-1}, t_{12}, t_{23} \rangle$, где $t_{ij} = E + e_{ij}$, E — единичная матрица, а e_{ij} — матричная единица. Используя этот результат, нетрудно доказать определимость произвольного ассоциативного кольца R с единицей в группе $\overline{UT}(n, R) \rightleftharpoons \langle UT(n, R); \cdot, ^{-1}, t_{12}, \ldots, t_{n-1,n} \rangle$ для любого $n \geq 3$, откуда непосредственно следует, что теории $\mathcal{E}\overline{UT}(n, R)$ и $\mathcal{E}R$ одновременно разрешимы или неразрешимы. О.В. Белеградек [1] усилил этот результат, доказав, что для любого ассоциативного коммутативного или ассоциативного без делителей нуля кольца K с единицей элементарная теория группы $UT(n, K)$ в сигнатуре без констант разрешима тогда и только тогда, когда разрешима элементарная теория кольца K. В этой же работе показано, что для произвольного ассоциативного кольца это неверно, ибо существует такое ассоциативное кольцо R, для которого теория $\mathcal{E}R$ неразрешима, а теория $\mathcal{E}UT(n, R)$ разрешима для любого $n \geq 3$.

Обозначим через $R^{n \times n}$ кольцо всех матриц порядка $n \geq 1$ над ассоциативным кольцом R с единицей. Если R коммутативно, то оно очевидным образом выделяется в кольце $R^{n \times n}$ при помощи формулы $\varphi(x) \rightleftharpoons \forall y(xy = yx)$, откуда легко следует, что для любого $n \geq 1$ теория $\mathcal{E}R^{n \times n}$ разрешима тогда и только тогда, когда разрешима теория $\mathcal{E}R$. Легко понять, что произвольное ассоциативное кольцо R с единицей определимо в кольце $R^{n\times n}$ при помощи констант $e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1n}$. И поэтому элементарная теория кольца $R^{n\times n}$ в сигнатуре с этими константами разрешима тогда и только тогда, когда разрешима элементарная теория самого кольца R. Обозначим через $NT(n,R)$ кольцо всех верхних нильтреугольных матриц порядка n над ассоциативным кольцом R. Б. Роуз [29] применил рассуждения из [16] к кольцу $NT(n,R)$ для произвольного ассоциативного кольца R с единицей и доказал определимость R в кольце $\overline{NT}(n,R) \rightleftharpoons \langle NT(n,R); +, \cdot, e_{12}, \ldots, e_{n-1,n}\rangle$ для любого $n \geq 3$. К.Р. Видела [30] показал, что для любого ассоциативного кольца R с единицей орбита кортежа $(e_{12}, \ldots, e_{n-1,n})$ под действием группы автоморфизмов кольца $NT(n,R)$ определима в $NT(n,R)$. Таким образом, теории $\mathcal{E}NT(n,R)$ и $\mathcal{E}R$ для $n \geq 3$ одновременно разрешимы или неразрешимы.

Из приведенных результатов видно, что почти всегда вопрос о разрешимости элементарных теорий матричных алгебр над кольцом R решается "по модулю" разрешимости элементарной теории самого кольца R. Особую роль в подобных исследованиях играет кольцо $\mathbb{Z}$ целых чисел. Тем более, что неразрешимость диофантовой теории кольца целых чисел, вытекающая из отрицательного решения Ю.В. Матиясевичем в [18] 10-й проблемы Гильберта, позволяет установить неразрешимость не только элементарных, но и некоторых ограниченных теорий первого порядка матричных алгебр над $\mathbb{Z}$ рассмотренных выше типов.

В цитированной работе [17] была доказана неразрешимость теорий $\mathcal{E}GL(n,\mathbb{Z})$, $\mathcal{E}SL(n,\mathbb{Z})$ для любого $n \geq 3$. А.М. Слободской в [23] значительно усилил этот результат для группы $GL(3,\mathbb{Z})$, доказав неразрешимость универсальной теории этой группы. Из указанных выше результатов следует неразрешимость теорий $\mathcal{E}UT(n,\mathbb{Z})$ и $\mathcal{E}NT(n,\mathbb{Z})$ для любого $n \geq 3$. Анализируя интерпретацию кольца целых чисел в группе $\overline{UT}(3,\mathbb{Z})$, построенную в [16], В.Г. Дурнев [13], [14] доказал неразрешимость диофантовых теорий групп $GL(3,\mathbb{Z})$, $SL(3,\mathbb{Z})$, рассматриваемых в сигнатуре с константами t_{12}, t_{23}, а также сколемских теорий групп $GL(n,\mathbb{Z})$, $SL(n,\mathbb{Z})$ для любого $n \geq 3$, рассматриваемых в сигнатуре без констант. Кроме того, используя [16], [29], нетрудно показать неразрешимость диофантовых теорий группы $\overline{UT}(n,\mathbb{Z})$ и кольца $\overline{NT}(n,\mathbb{Z})$, а также сколемских теорий группы $UT(n,\mathbb{Z})$ и кольца $NT(n,\mathbb{Z})$ для любого $n \geq 3$.

Опираясь на результат Ю.В. Матиясевича, В.А. Романьков в [21] доказал неразрешимость $\exists$-теории свободной нильпотентной группы ступени $n \geq 9$ счетного ранга в сигнатуре с двумя свободными образующими. Отсюда следует неразрешимость $\exists$-теории свободной нильпотентной группы $\mathcal{F}_n$ ступени $n \geq 9$ ранга n в этой же сигнатуре, а значит, и неразрешимость $\forall\exists$-теории группы $\mathcal{F}_n$ в сигнатуре без констант. Хорошо известно, что для $n \geq 3$ группа $\mathcal{F}_{n-1}$ изоморфна группе $UT(n, \mathbb{Z})$. Следовательно, для любого $n \geq 10$ неразрешимы $\exists$-теория группы $UT(n, \mathbb{Z})$ в сигнатуре с константами, интерпретируемыми матрицами t_{12} и t_{23}, и $\forall\exists$-теория группы $UT(n, \mathbb{Z})$ в сигнатуре без констант. Наконец, отметим неразрешимость сколемской теории кольца $\mathbb{Z}^{n \times n}$, очевидным образом вытекающей из результата Ю.В. Матиясевича и упомянутой выше интерпретации $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}^{n \times n}$.

Обилие результатов по неразрешимости элементарных и ограниченных теорий классических целочисленных матричных групп и колец приводит к проблеме, сформулированной Ю.М. Важениным в [4] для произвольного класса алгебраических систем: описать все в некоторых рамках разрешимые теории рассматриваемого класса алгебраических систем. Для решения этой проблемы Ю.М. Важениным в [3]–[5] был разработан продуктивный метод критических теорий. Для точных формулировок введем соответствующие понятия из [3]–[5]. Пусть $\mathcal{E}$ — множество всех формул логики первого порядка некоторой сигнатуры σ, записанных в предваренной нормальной форме. Множества $L \subseteq \mathcal{E}$ будем называть *языками*. Для класса $\mathcal{K}$ алгебраических систем сигнатуры σ и языка L через $L\mathcal{K}$ будем обозначать совокупность всех предложений из L, истинных на $\mathcal{K}$. Пусть H — рекурсивная и фундированная иерархия языков, т.е. семейство языков, покрывающее $\mathcal{E}$, упорядоченное рекурсивным отношением включения и удовлетворяющее условию минимальности. Иерархия H языков определяет для класса $\mathcal{K}$ иерархию теорий $H\mathcal{K} = \{L\mathcal{K} \mid L \in H\}$. Теория $L\mathcal{K}$ называется *H-критической*, если она является минимальной в $H\mathcal{K}$ неразрешимой теорией. Множество всех языков $L \in H$ таких, что теории $L\mathcal{K}$ являются H-критическими, образуют *границу разрешимости* $\mathcal{B}_H(\mathcal{K})$ данного класса $\mathcal{K}$ относительно иерархии H. Нахождение границы разрешимости класса $\mathcal{K}$ означает установление полной в рамках иерархии H алгоритмической картины для $\mathcal{K}$, поскольку теория $L\mathcal{K} \in H\mathcal{K}$ будет разрешимой тогда и только тогда, когда $L \not\supseteq L_1$ для любого языка $L_1 \in \mathcal{B}_H(\mathcal{K})$.

Введем иерархии, построенные в [3]–[5]. Пусть $C_i \in \{\forall, \exists\}$, $C_i \neq C_{i+1}$ для $i \in \{1, \ldots, p-1\}$ и $r, s, t \in \{0, 1\}$. Определим язык $C_1 \ldots C_p \neg^r \wedge^s \vee^t$ из $\mathcal{E}$, где $z^1 = z$ и z^0 — пустой символ для $z \in \{\neg, \wedge, \vee\}$, следующим образом. Во-первых, блочная схема кванторной приставки каждой из формул $C_1 \dots C_p \neg^r \wedge^s \vee^t$ является подсловом слова $C_1 \dots C_p$. Во-вторых, связка $\neg$, $\wedge$, $\vee$ допускается в записи бескванторной части этих формул, если соответственно $r = 1$, $s = 1$, $t = 1$, и не допускается, если соответственно $r = 0$, $s = 0$, $t = 0$. Обозначим, кроме того, через $\varpi\neg^r \wedge^s \vee^t$ объединение $\bigcup\limits_{p\in\omega} C_1 \dots C_p \neg^r \wedge^s \vee^t$, а через θ — слово $\neg \wedge \vee$. Семейство SA всех языков вида $C_1 \dots C_p \neg^r \wedge^s \vee^t$, $\neg^r \wedge^s \vee^t$ и $\varpi\neg^r \wedge^s \vee^t$ вместе с отношением включения называется *схемно-альтернативной иерархией языков*. Более бедной по сравнению с этой иерархией языков является *схемная иерархия*, т.е. семейство S всех языков вида $C_1 \dots C_p\theta$ и $\varpi\theta$, упорядоченное включением. Пусть $n \le \omega$, $\bar{n}\theta = \{C_1\vec{x} \dots C_p\vec{y}\xi \mid p \le n\}$. *Переменной иерархией* называется упорядоченное включением семейство языков $V = \{\bar{n}\theta \mid n \le \omega\}$. Наконец, *альтернативной* и *переменно-альтернативной иерархией* называются семейства $A = \{\bar{\omega}\neg^r \wedge^s \vee^t \mid r, s, t \in \{0,1\}\}$ и $VA = \{X \cap Y \mid X \in V, Y \in A\}$ соответственно.

В [5] показано, что все определенные выше иерархии рекурсивны и удовлетворяют условию минимальности. Наиболее сложная из них иерархия SA содержит такие известные языки как позитивный, сколемский, универсальный, экзистенциальный, диофантов и эквациональный. Чаще всего рассматривается именно эта иерархия и поэтому приставка $SA-$ в выражении "SA-критическая", а также индекс SA в записи $B_{SA}(\mathcal{K})$ часто опускаются.

Основополагающие результаты по описанию границ разрешимости получены Ю.М. Важениным в [4]–[6]. Дальнейшие результаты опубликованы в [7]–[11], [15], [19], [20], [22].

В [5] было доказано, что границей разрешимости кольца целых чисел в сигнатуре без констант является множество $\{\forall\exists, \exists\forall, \forall\neg\vee, \exists\neg\wedge\}$, а в сигнатуре с единицей — множество $\{\exists, \forall\neg\}$. В [7] анонсировано совпадение границы разрешимости кольца $\mathbb{Z}^{n\times n}$, $n \ge 1$, в сигнатуре с множеством всех матричных единиц порядка n в качестве констант с границей разрешимости кольца целых чисел в сигнатуре с единицей. В диссертации эти результаты существенно дополняются и обобщаются. Наряду с кольцом $\mathbb{Z}^{n\times n}$ в настоящей работе исследуются границы разрешимости группы $GL(3,\mathbb{Z})$ и моноида $ML(3,\mathbb{Z})$ всех целочисленных матриц порядка 3, а также границы разрешимости некоторых классов групп $GL(n,\mathbb{Z})$ и моноидов $ML(n,\mathbb{Z})$, $n \ge 3$, в сигнатурах с константами и без констант.

Как уже отмечалось, разрешимость элементарных теорий матричных алгебр над данным кольцом определяется разрешимостью элементарной теории самого кольца. В диссертации исследуется естественный вопрос о связи границ разрешимости матричных алгебр с границами разрешимости этого кольца в различных сигнатурах.

Группа $GL(n, R)$ и кольцо $R^{n\times n}$ для произвольного бесконечного ассоциативного кольца R с единицей изоморфны группе всех автоморфизмов и соответственно кольцу всех эндоморфизмов свободного R-модуля R^n. Таким образом, группу $GL(n, R)$ и мультипликативную полугруппу кольца $R^{n\times n}$ можно рассматривать как некоторые группу и полугруппу преобразований бесконечного множества. Все такие группы и полугруппы являются подгруппами и соответственно подполугруппами подходящих бесконечных симметрических групп и полугрупп. Наследственная неразрешимость элементарной теории бесконечной симметрической группы доказана Ю.М. Важениным в [2]. В.В. Маевским в [15] описаны границы разрешимости бесконечной симметрической полугруппы и класса всех бесконечных симметрических полугрупп. Они совпали с множеством $\{\forall\exists, \exists\forall, \forall\neg\vee, \exists\neg\wedge\}$. Там же аносирован следующий результат: теории языков $\forall\neg\vee$, $\exists\neg\wedge$ бесконечной симметрической группы и класса всех бесконечных симметрических групп являются критическими, а теории языков $\forall\exists\forall$, $\exists\forall\exists$ этих группы и класса неразрешимы. Эти исследования продолжены в нашей диссертации.

В рабсте используются методы, конструкции и результаты теории моделей, математической логики, а также теории групп и теории колец.

В диссертации получены следующие теоретические результаты:

сделано существенное продвижение в описании границ разрешимости группы $GL(3, \mathbb{Z})$ и моноида $ML(3, \mathbb{Z})$, а также класса групп $GL(n, \mathbb{Z})$ и класса моноидов $ML(n, \mathbb{Z})$ для $n \geq 3$ в сигнатуре без констант и в сигнатуре с двумя константами;

описаны границы разрешимости колец всех целочисленных матриц порядка $n \geq 1$ в различных сигнатурах, а также некоторых естественных классов таких колец;

доказано совпадение границ разрешимости ряда колец и матричных колец над ними;

доказана разрешимость теорий языка $\exists\forall \wedge \vee$ бесконечной симметрической группы и класса всех бесконечных симметрических групп, в частности, выписаны все шесть возможных границ разрешимости бесконечной симметрической группы.

Все перечисленные результаты являются новыми.

Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть применены в теории моделей, а также использованы при чтении специальных курсов по алгебре и математической логике.

Основные утверждения диссертации были представлены на Международных алгебраических конференциях в Санкт-Петербурге (1997), Новосибирске (1997,1998), Москве (1998), на Международной конференции "Комбинаторные и вычислительные методы в математике" в Омске (1998), докладывались на заседаниях семинаров "Алгебра и логика" (Новосибирск, 1997, 1998) и "Алгебраические системы" (Екатеринбург, 1995–2000). Все результаты диссертации отражены в публикациях [31]–[40] автора. Работы [31], [37]–[40] написаны в нераздельном соавторстве.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, разделенных на 10 параграфов. Общий объем дисертации составляет 100 страниц. Библиография содержит 62 наименования. Нумерация параграфов и утверждений диссертации сквозная.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается обоснование и формулировка рассматриваемых проблем, обсуждаются основные понятия и приводится обзор результатов диссертации.

Обозначим через G группу $GL(3,\mathbb{Z})$ в сигнатуре $\sigma = \langle \cdot, ^{-1} \rangle$ и через $\overline{G}$ — группу $GL(3,\mathbb{Z})$ в сигнатуре $\overline{\sigma} = \langle \cdot, ^{-1}, c_1, c_2 \rangle$ с константами, интерпретируемыми матрицами t_{12}, t_{23}. Из цитированных выше работ [14], [23] следует неразрешимость теорий $\forall\neg\vee G$, $\exists\wedge\overline{G}$.

В главе 1 изучаются границы разрешимости групп G и $\overline{G}$. В ней доказаны следующие утверждения

Теорема 1. *Теории $\forall\neg\vee G$, $\exists\neg\wedge G$ являются критическими, а теория $\exists\forall\wedge\vee G$ разрешима.*

Теорема 2. *Теории $\exists\forall\overline{G}$, $\forall\neg\vee\overline{G}$ неразрешимы, а теория $\forall\wedge\vee\overline{G}$ разрешима.*

Исходя из теорем 1, 2, естественно предположить, что теории $\forall\exists G$ и $\exists\overline{G}$ неразрешимы. Если это так, то будет справедлива

Гипотеза 1. *Имеют место равенства*

$$\mathcal{B}(G) = \{\forall\exists, \exists\forall\neg, \forall\neg\vee, \exists\neg\wedge\},\ \mathcal{B}(\overline{G}) = \{\exists, \forall\neg\}.$$

В.Г. Дурневым в [13] была доказана неразрешимость теории $\forall\exists\neg\wedge\vee GL(n,\mathbb{Z})$ для любого $n \geq 3$, а значит и теории $\exists\forall\neg\wedge\vee GL(n,\mathbb{Z})$. Поэтому определенный интерес представляет следующее утверждение, вытекающее из доказательства теоремы 1.

Следствие 1. *Теория* $\exists\forall\wedge\vee GL(n,\mathbb{Z})$ *разрешима для любого* $n \geq 2$.

Обобщенным групповым тождеством в группе A назовем формулу

$$\forall x_1 \ldots x_n \left(a_1 x_{i_1}^{\alpha_1} \ldots a_m x_{i_m}^{\alpha_m} = 1\right),$$

где $a_1, \ldots, a_m \in A$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Причем для любого $j \in \{1, \ldots, m-1\}$ из условия $i_j = i_{j+1}$, $\alpha_j\alpha_{j+1} < 0$ следует, что элемент a_{j+1} нецентральный, а из условия $i_1 = i_m$, $\alpha_1\alpha_m < 0$ следует, что элемент a_1 нецентральный. В [27] Г.М. Томановым доказана невыполнимость обобщенных групповых тождеств в группе $GL(n,F)$ для произвольного замкнутого нормированного поля F и $n \geq 2$. А в [12] И.З. Голубчиком и А.В. Михалевым доказана невыполнимость обобщенных групповых тождеств в группе $GL(n,D)$ для произвольного тела D с бесконечным центром и $n \geq 2$. К этим результатам примыкает

Следствие 2. *В группе* $GL(n,\mathbb{Z})$ *для любого* $n \geq 2$ *невыполнимо ни одно обобщенное групповое тождество.*

Наряду с группами $G, \overline{G}$ в главе 1 будем изучать класс $\mathcal{G}$ групп $GL(n,\mathbb{Z})$ для всех $n \geq 3$, рассматриваемых в сигнатуре σ, и класс $\overline{\mathcal{G}}$ этих групп, рассматриваемых в сигнатуре $\overline{\sigma}$. Для классов $\mathcal{G}$, $\overline{\mathcal{G}}$ справедливы следующие утверждения, аналогичные теоремам 1,2.

Теорема 3. *Теории* $\forall\neg\vee\mathcal{G}$, $\exists\neg\wedge\mathcal{G}$ *являются критическими, а теории* $\forall\neg\wedge\mathcal{G}$, $\exists\neg\vee\mathcal{G}$, $\exists\forall\wedge\vee\mathcal{G}$ *разрешимы.*

Теорема 4. *Теории* $\exists\wedge\overline{\mathcal{G}}$, $\exists\forall\overline{\mathcal{G}}$, $\forall\neg\vee\overline{\mathcal{G}}$ *неразрешимы, а теория* $\forall\wedge\vee\overline{\mathcal{G}}$ *разрешима.*

Как и в случае групп G и $\overline{G}$, есть основания полагать, что теории $\forall\exists\mathcal{G}$, $\exists\forall\neg\mathcal{G}$, $\exists\overline{\mathcal{G}}$, $\forall\neg\overline{\mathcal{G}}$ неразрешимы. В этом случае будет справедлива

Гипотеза 2. *Имеют место равенства*

$$\mathcal{B}(\mathcal{G}) = \{\forall\exists, \exists\forall\neg, \forall\neg\vee, \exists\neg\wedge\},\ \mathcal{B}(\overline{\mathcal{G}}) = \{\exists, \forall\neg\}.$$

В главе 1 исследуются также границы разрешимости моноида $ML(3,\mathbb{Z})$, тесно связанного с $GL(3,\mathbb{Z})$. Обозначим через M моноид $ML(3,\mathbb{Z})$ в сигнатуре $\varrho = \langle\cdot, 1\rangle$, а через $\overline{M}$ — этот же моноид в сигнатуре $\overline{\varrho} = \langle\cdot, 1, c_1, c_2\rangle$ с константами, интерпретируемыми матрицами t_{12}, t_{23}. Для моноидов M и $\overline{M}$ справедливы следующие аналоги теорем 1, 2.

Теорема 5. *Теории $\forall\neg\vee M$, $\exists\neg\wedge M$ являются критическими, а теория $\exists\forall\wedge\vee M$ разрешима.*

Теорема 6. *Теории $\exists\wedge\overline{M}$, $\exists\forall\overline{M}$, $\forall\neg\vee\overline{M}$ неразрешимы, а теория $\forall\wedge\vee\overline{M}$ разрешима.*

Из теорем 2, 6 следует, что

$$\mathcal{B}(\overline{G}), \mathcal{B}(\overline{M}) \in \{\{\exists, \forall\neg\}, \{\exists\wedge, \forall\exists, \exists\forall, \forall\neg\vee\},$$
$$\{\exists\wedge, \exists\forall, \forall\exists\vee, \forall\exists\neg, \forall\neg\vee\}, \{\exists\wedge, \exists\forall, \forall\exists\neg, \forall\neg\vee\}\}.$$

Из упомянутого выше результата [13] о неразрешимости теории $\forall\exists\neg\wedge\vee GL(n,\mathbb{Z})$ для любого $n \geq 3$ нетрудно получить неразрешимость теории $\forall\exists\neg\wedge\vee ML(n,\mathbb{Z})$, а значит и теории $\exists\forall\neg\wedge\vee ML(n,\mathbb{Z})$ для любого $n \geq 3$. Таким образом, представляет интерес следующее утверждение, вытекающее из доказательства теоремы 5.

Следствие 3. *Теория $\exists\forall\wedge\vee ML(n,\mathbb{Z})$ разрешима для любого $n \geq 2$.*

Обозначим через $\mathcal{M}$ (соответственно, через $\overline{\mathcal{M}}$) класс моноидов $ML(n,\mathbb{Z})$ для всех $n \geq 3$ в сигнатуре ϱ ($\overline{\varrho}$). Для классов $\mathcal{M}$ и $\overline{\mathcal{M}}$ справедливы утверждения, аналогичные теоремам 3,4.

Теорема 7. *Теории $\forall\neg\vee\mathcal{M}$, $\exists\neg\wedge\mathcal{M}$ являются критическими, а теории $\forall\neg\wedge\mathcal{M}$, $\exists\neg\vee\mathcal{M}$, $\exists\forall\wedge\vee\mathcal{M}$ разрешимы.*

Теорема 8. *Теории $\exists\wedge\overline{\mathcal{M}}$, $\exists\forall\overline{\mathcal{M}}$, $\forall\neg\vee\overline{\mathcal{M}}$ неразрешимы, а теория $\forall\wedge\vee\overline{\mathcal{M}}$ разрешима.*

В главе 2 описываются границы разрешимости колец $M_n \rightleftharpoons \langle \mathbb{Z}^{n\times n}; +, \cdot\rangle$, $M_n(b) \rightleftharpoons \langle \mathbb{Z}^{n\times n}; +, \cdot, b\rangle$, где b — произвольная ненулевая матрица из $\mathbb{Z}^{n\times n}$. Кроме того, в этой главе исследуются границы разрешимости некоторых естественных классов таких колец.

Для непустого множества K натуральных чисел через $\mathcal{M}_K$ обозначим класс $\{M_n \mid n \in K\}$, через $\mathcal{M}_K(\beta)$ — класс $\{M_n(b_n) \mid n \in K\}$, где $\beta \rightleftharpoons \{b_n \in \mathbb{Z}^{n\times n} \mid n \in K\}$, а через ε — множество $\{E_n \mid n \in K\}$, где E_n — единичная матрица порядка n.

В [5] доказано, что $\mathcal{B}(M_1) = \{\forall\exists, \exists\forall, \forall\neg\vee, \exists\neg\wedge\}$, $\mathcal{B}(M_1(1)) = \{\exists, \forall\neg\}$. А в [7] анонсировано совпадение границы разрешимости кольца $\langle \mathbb{Z}^{n\times n}, +, \cdot, e_{11}, e_{12}, \dots, e_{nn}\rangle$, $n \geq 1$, с границей разрешимости кольца $M_1(1)$. Существенно обобщая и дополняя эти результаты, мы доказываем, что имеют место следующие утверждения.

Теорема 9. *Для любого непустого рекурсивного множества K натуральных чисел справедливо равенство $\mathcal{B}(\mathcal{M}_K) = \mathcal{B}(M_1)$.*

Теорема 10. *Если K — непустое конечное множество натуральных чисел и множество $\beta \rightleftharpoons \{b_n \in \mathbb{Z}^{n\times n} \mid n \in K\}$ состоит из ненулевых матриц, то $\mathcal{B}(\mathcal{M}_K(\beta)) = \mathcal{B}(M_1(1))$. Если K — бесконечное рекурсивное множество, то $\mathcal{B}(\mathcal{M}_K(\varepsilon)) \in \{\mathcal{B}(M_1(1)), \{\forall\neg\vee, \exists\}\}$.*

Из теорем 9, 10 следует совпадение в иерархии SA границ разрешимости кольца целых чисел и кольца целочисленных матриц порядка $n \geq 1$ в сигнатуре без констант и в сигнатуре с произвольной ненулевой константой. В главе 3 изучается общий вопрос о совпадении границ разрешимости ассоциативных колец с единицей и соответствующих им матричных колец. Всюду ниже считаем, что характеристика кольца R известна.

Обозначим через R_1 кольцо R в сигнатуре с единицей, а через R_b — кольцо R в сигнатуре с константой b. Соответственно через $R_1^{n\times n}$, $R_b^{n\times n}$ и $R^{n\times n}$ обозначим кольца всех матриц порядка n над R в соответствующих сигнатурах.

Теорема 11. *Если кольцо R является телом нулевой или нечетной характеристики или целостным кольцом, то для любого $n \geq 1$ справедливы равенства $\mathcal{B}_S(R^{n\times n}) = \mathcal{B}_S(R)$, $\mathcal{B}_S(R_1^{n\times n}) = \mathcal{B}_S(R_1)$. Если R — произвольное ассоциативное кольцо с единицей, то для любых $n \geq 1$ и $i, j \in \{1, \dots, n\}$ истинно равенство $\mathcal{B}_S(R_{e_{ij}}^{n\times n}) = \mathcal{B}_S(R_1)$.*

Теорема 12. *Пусть R — целостное кольцо и существует многочлен $\varphi(x,y)$ с целыми коэффициентами такой, что $\varphi(\xi,\eta)=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $(\xi=0$ и $\eta=0)$ для любых $\xi,\eta\in R$. Тогда для любого $n\geq 1$ справедливы равенства $\mathcal{B}_{SA}(R^{n\times n})=\mathcal{B}_{SA}(R)$, $\mathcal{B}_{SA}(R_1^{n\times n})=\mathcal{B}_{SA}(R_1)$.*

Связь между границами разрешимости кольца R в сигнатуре без констант и в в сигнатуре с единицей устанавливает следующая

Теорема 13. *Если кольцо R имеет единицу и вложимо в тело, то $\mathcal{B}_S(R)=\mathcal{B}_S(R_1)$. Если же R является целостным кольцом и существует многочлен $\varphi(x,y)$ с целыми коэффициентами такой, что $\varphi(\xi,\eta)=0 \Leftrightarrow (\xi=0$ и $\eta=0)$ для любых $\xi,\eta\in R$, то справедливы следующие утверждения: (1) если теория $\exists R_1$ неразрешима, то $\mathcal{B}_{SA}(R)=\{\forall\exists,\exists\forall,\forall\neg\vee,\exists\neg\wedge\}$, $\mathcal{B}_{SA}(R_1)=\{\exists,\forall\neg\}$; (2) если теория $\exists R_1$ разрешима, то $\mathcal{B}_{SA}(R)=\mathcal{B}_{SA}(R_1)$.*

Утверждение (1) этой теоремы справедливо, например, для кольца $\mathbb{Z}$ [5]. В [28] Д. Робинсон доказала неразрешимость элементарной теории поля $\mathbb{Q}$. Следовательно, $\mathcal{B}_{SA}(\mathbb{Q})\neq\emptyset$. А.М. Слободской в [25] анонсировал результат о разрешимости теории $\forall\neg\wedge\vee\mathbb{Q}$. Таким образом, для кольца $\mathbb{Q}$ реализуется утверждение (2) нашей теоремы.

Кроме кольца $R^{n\times n}$ в главе 3 исследуется более богатая и тесно связанная с $R^{n\times n}$ матричная алгебра $\underline{M}_n(R)$ над ассоциативным кольцом R с единицей, определение которой принадлежит Ю.М. Важенину. Пусть $\underline{M}_n(R)\rightleftharpoons\langle M_n(R);+,\cdot\rangle$, где операции $+$ и $\cdot$ на основном множестве $M_n(R)\rightleftharpoons\bigcup\limits_{\substack{1\leq k\leq n\\1\leq l\leq n}} R^{k\times l}$ заключаются в расширении при необходимости исходных матриц "оптимальным" количеством нулевых строк и столбцов, добавляемых снизу и справа, с последующими "обычными" сложением и умножением полученных матриц. Естественность введения $\underline{M}_n(R)$ можно объяснить следующим образом. Пусть $e_1,e_2,\ldots,e_n$ — базис свободного R–модуля R^n. Тогда матричную алгебру $\underline{M}_n(R)$ можно рассматривать как множество эндоморфизмов R–модуля $\langle e_1,e_2,\ldots,e_k\rangle$ в R–модуль $\langle e_1,e_2,\ldots,e_l\rangle$, где k,l пробегает множество $\{1,\ldots,n\}$, с естественно определенными на нем операциями сложения и суперпозиции.

Теорема 14. *Если R — произвольное ассоциативное кольцо с единицей, то для любого $n\geq 1$ справедливо равенство $\mathcal{B}_S(\underline{M}_n(R))=\mathcal{B}_S(R)$.*

Если рассмотреть случай, когда $R=\mathbb{Z}$, то можно явно описать границу разрешимости $\mathcal{B}_{SA}(\underline{M}_n(R))$. А именно, справедлива

Теорема 15. *Для любого* $n \geq 1$ *имеет место равенство*
$$\mathcal{B}_{SA}(\underline{M}_n(\mathbb{Z})) = \mathcal{B}_{SA}(\mathbb{Z}).$$

Таким образом, границы разрешимости колец $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^{n\times n}$ и алгебры $\underline{M}_n(\mathbb{Z})$ совпадают. Это еще один факт в пользу изучения алгоритмических свойств алгебры $\underline{M}_n(R)$.

В главе 4 изучаются границы разрешимости произвольной бесконечной симметрической группы Sym, а также класса $\mathcal{S}$ всех бесконечных симметрических групп. Доказывается, что справедлива следующая

Теорема 16. *Теории* $\exists\forall \wedge \vee Sym$ *и* $\exists\forall \wedge \vee \mathcal{S}$ *разрешимы.*

Заметим, что благодаря [15] справедливо следующее

$$\mathcal{B}(Sym) \in \{\{\forall\neg\vee, \exists\neg\wedge, \forall\exists\forall, \exists\forall\exists\}, \{\forall\neg\vee, \exists\neg\wedge, \forall\exists, \exists\forall\neg\},$$
$$\{\forall\neg\vee, \exists\neg\wedge, \forall\exists\forall, \exists\forall\exists, \forall\exists\wedge\}, \{\forall\neg\vee, \exists\neg\wedge, \forall\exists\forall, \exists\forall\exists, \forall\exists\vee\},$$
$$\{\forall\neg\vee, \exists\neg\wedge, \forall\exists\forall, \exists\forall\exists, \forall\exists \wedge \vee\},$$
$$\{\forall\neg\vee, \exists\neg\wedge, \forall\exists\wedge, \forall\exists\vee, \forall\exists\forall, \exists\forall\exists\}\}.$$

Литература

[1] *Белеградек О.В.* Теория моделей унитреугольных и экзистенциально замкнутых групп// Дисс...докт. физ.-мат. наук. Кемерово. 1995.

[2] *Важенин Ю.М.* Об элементарных теориях симметрических групп и полугрупп// Изв. вузов. Математика. 1974. № 1. С.419–434.

[3] *Важенин Ю.М.* О критических теориях// УП. Вс. конф. по матем. логике. Новосибирск. 1984. С.27.

[4] *Важенин Ю.М.* Алгоритмические проблемы и иерархии языков первого порядка// Алгебра и логика. 1987. Т.26, № 4. С.419–434.

[5] *Важенин Ю.М.* Критические теории// Сиб. матем. журн. 1988. Т.29, № 1. С.23–31.

[6] *Важенин Ю.М.* Критические теории некоторых классов неассоциативных колец// Алгебра и логика. 1989. Т.28, № 5. С.393–401.

[7] *Важенин Ю.М.* О границах разрешимости матричных колец// Вторые математические чтения, посвященные памяти М.Я. Суслина. Тезисы докладов. Саратов, 1991. С.82.

[8] *Важенин Ю.М., Глухих А.Ю.* О критических теориях конечно определенных колец// Вторые математические чтения, посвященные памяти М.Я. Суслина. Тезисы докладов. Саратов, 1991. С.84.

[9] *Важенин Ю.М., Тюков В.А.* О критических теориях свободных ассоциативных колец с единицей// Вторые математические чтения, посвященные памяти М.Я. Суслина. Тезисы докладов. Саратов, 1991. С.85.

[10] *Важенин Ю.М., Попов В.Ю.* Критические теории свободных нильпотентных колец некоторых типов// Изв. вузов. Математика. 1991. № 3. С.74–76.

[11] *Важенин Ю.М., Попов В.Ю.* Границы разрешимости псевдомногообразий конечных полугрупп, групп и колец// Третья международная конференция по алгебре. Тезисы докладов. Красноярск, 1993. С.61.

[12] *Голубчик И.З., Михалев А.В.* Обобщенные групповые тождества в классических группах// Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР, Мат. ин-т им. Стеклова, Ленингр. отд-ние, 1982. Т.114. С.96–119.

[13] *Дурнев В.Г.* Неразрешимость некоторых теорий групп $SL(n,\mathbb{Z})$ и $GL(n,\mathbb{Z})$// Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль, 1994. С.61–68.

[14] *Дурнев В.Г.* Неразрешимость $\exists$-теории с одной константой свободной разрешимой группы// Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль, 1992.

[15] *Маевский В.В.* Об ограниченных теориях бесконечных групп и полугрупп// Международ конф. по алгебре, посвященная памяти А.И. Мальцева. Тезисы докладов. Новосибирск, 1989. С.73.

[16] *Мальцев А.И.* Об одном соответствии между кольцами и группами// Матем. сб. 1960. Т.50, № 3. С.257–266.

[17] *Мальцев А.И.* Об элементарных свойствах линейных групп// Некоторые проблемы математики и механики. Новосибирск, 1961. С.110–132.

[18] *Матиясевич Ю.В.* Диофантовость перечислимых множеств// Докл. АН СССР. 1970. Т.191, № 2. С.279–282.

[19] *Попов В.Ю.* Критические теории над-коммутативно-ассоциативных многообрзий колец// Сиб. матем. журн. 1995. Т.36, № 6. С.1364–1374.

[20] *Попов В.Ю.* Критические теории многообразий нильпотентных колец// Сиб. матем. журн. 1997. Т.38, № 1. С.182–192.

[21] *Романьков В.А.* О неразрешимости проблемы эндоморфной сводимости в свободных нильпотентных группах и в свободных кольцах// Алгебра и логика. 1977. Т.16, № 4. С.457–471.

[22] *Сизый С.В.* Критические теории некоторых классов графов и унарных алгебр// Алгебра и логика. 1989. Т.28, № 4. С.454–462.

[23] *Слободской А.М.* Универсальная теория группы $GL(3, \mathbb{Z})$// Алгоритмические вопросы алгебраических систем и ЭВМ. Иркутск, 1979. С.200–217.

[24] *Слободской А.М., Фридман Э.И.* Разрешимость универсальной теории $\mathbb{Q}$// Всесоюзн. конф. по матем. логике. Тезисы докладов. Новосибирск, 1979. С.140.

[25] *Слободской А.М.* Неразрешимость универсальной теории конечных групп// Алгебра и логика. 1981. Т.20, № 2. С.207–230.

[26] *Супруненко Д.А.* Группы матриц. М.: Наука, 1972.

[27] *Томанов Г.М.* Обобщенные групповые тождества в линейных группах// Матем. сборник. 1984. Т.123, № 1. С.35–49.

[28] *Robinson J.* The undercibility of algebraic rings and fields// Pros. Amer. Math. Soc. 1953. V.10. P.437–449.

[29] *Rose B.* The $\aleph_1$-categority or stricly upper triangular matrix ring over algebraically closed fields// J. Symbol. Log. 1978. V.43. P.250–259.

[30] *Videla C.R.* On the model theory of ring $NT_n(R)$// J. Pure Appl. Algebra 1988. V.55, P.289–302.

Работы автора по теме диссертации

[31] *Важенин Ю.М., Нагребецкая Ю.В.* Критические теории групп и моноидов целочисленных матриц// Изв. вузов. Математика. 1998. № 7. С.77–79.

[32] *Нагребецкая Ю.В.* Разрешимость теорий первого порядка групп и моноидов целочисленных матриц// Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 3.

[33] *Нагребецкая Ю.В.* О границе разрешимости бесконечной симметрической группы// Изв. УрГУ. 1999. № 14. С.109–118.

[34] *Нагребецкая Ю.В.* О границах разрешимости колец целочисленных матриц/ Урал. гос. техн. ун-т, 2000. Деп. в ВИНИТИ. 2000, № 286. 22 с.

[35] *Нагребецкая Ю.В.* О граничной эквивалентности колец и матричных колец над ними/ Урал. гос. техн. ун-т, 2000. Деп. в ВИНИТИ. 2000, № 287. 29 с.

[36] *Нагребецкая Ю.В.* О теориях первого порядка групп и моноидов целочисленных матриц/ Урал. гос. техн. ун-т, 2000. Деп. в ВИНИТИ. 2000, № 288. 30 с.

[37] *Важенин Ю.М., Нагребецкая Ю.В.* О границах разрешимости колец целочисленных матриц// Международная алгебраическая конференция, посвященная памяти Д.К. Фаддеева. Тезисы докладов. Санкт-Петербург, 1997. С.178.

[38] *Важенин Ю.М., Нагребецкая Ю.В.* О совпадении границ разрешимости колец и матричных колец над ними// Международная алгебраическая конференция, посвященная памяти А.Г. Куроша. Тезисы докладов. М., 1998. С.193–194.

[39] *Важенин Ю.М., Нагребецкая Ю.В.* О граничной эквивалентности колец и матричных колец над ними// Международ. конф. "Комбинаторные и вычислительные методы в математике". Тезисы докладов. Омск, 1998. С.44.

[40] *Важенин Ю.М., Нагребецкая Ю.В.* О границах разрешимости групп и полугрупп преобразований бесконечного множества// Международ. конф. "Комбинаторные и вычислительные методы в математике". Тезисы докладов. Омск, 1998. С.43.

Подписано в печ. 27.04.2000. Формат 60 × 84 1/16. Тир. 100
Печать офсет. . Бумага писчая . Объем 1.0. Заказ № 244

Екатеринбург, К-83, пр. Ленина, 51. Типолаборатория УрГУ.